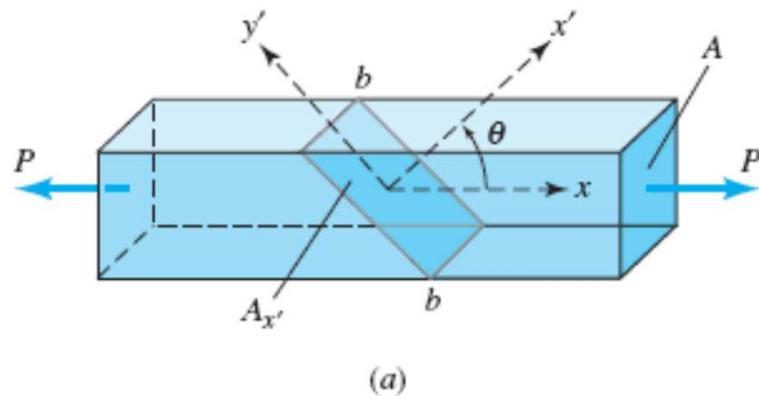


Análise de Tensões e Deformações

TENSÕES ATUANTES EM PLANOS INCLINADOS



$$\sigma_{x'} = \frac{P_{x'}}{A_{x'}} = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{P_{y'}}{A_{x'}} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

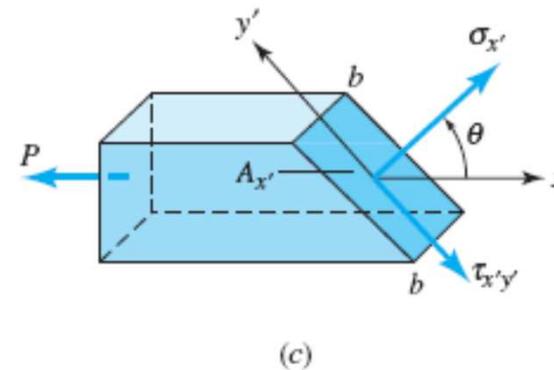
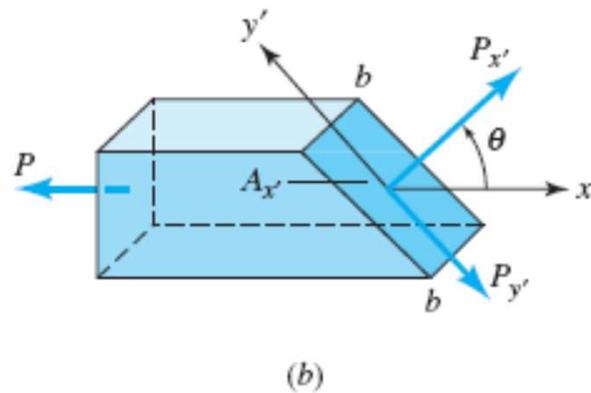


FIGURE 4.13 Prismatic bar in tension with forces and stresses on inclined planes.

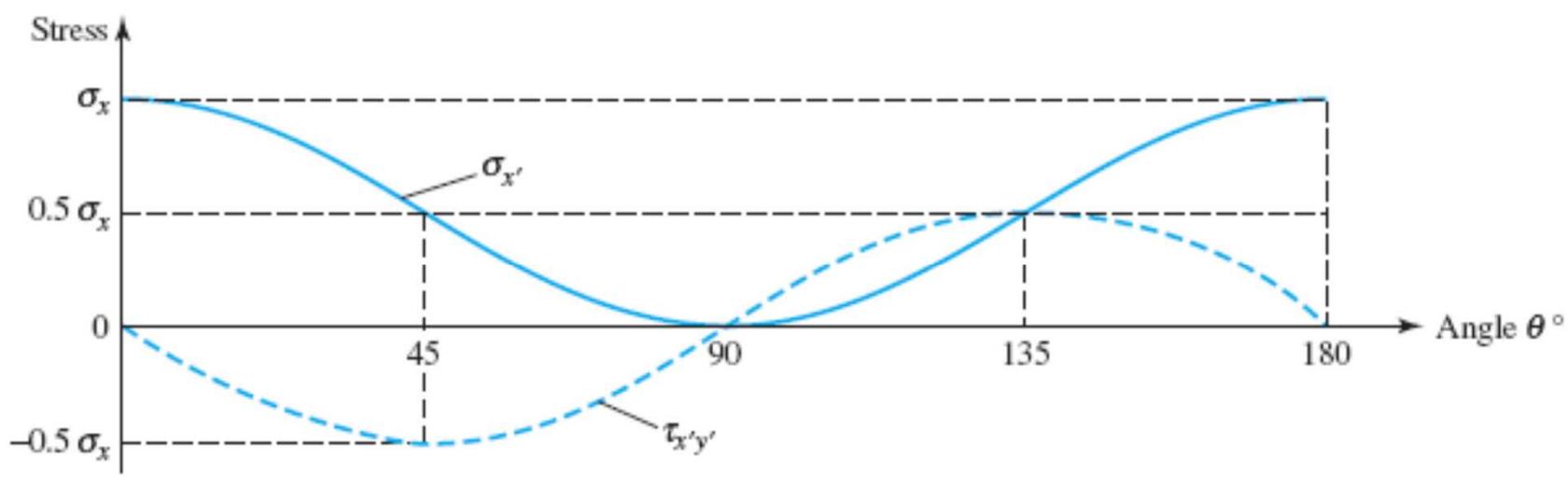


FIGURE 4.14 Variation of stress with the inclined section in the bar shown in Fig. 4.13a.

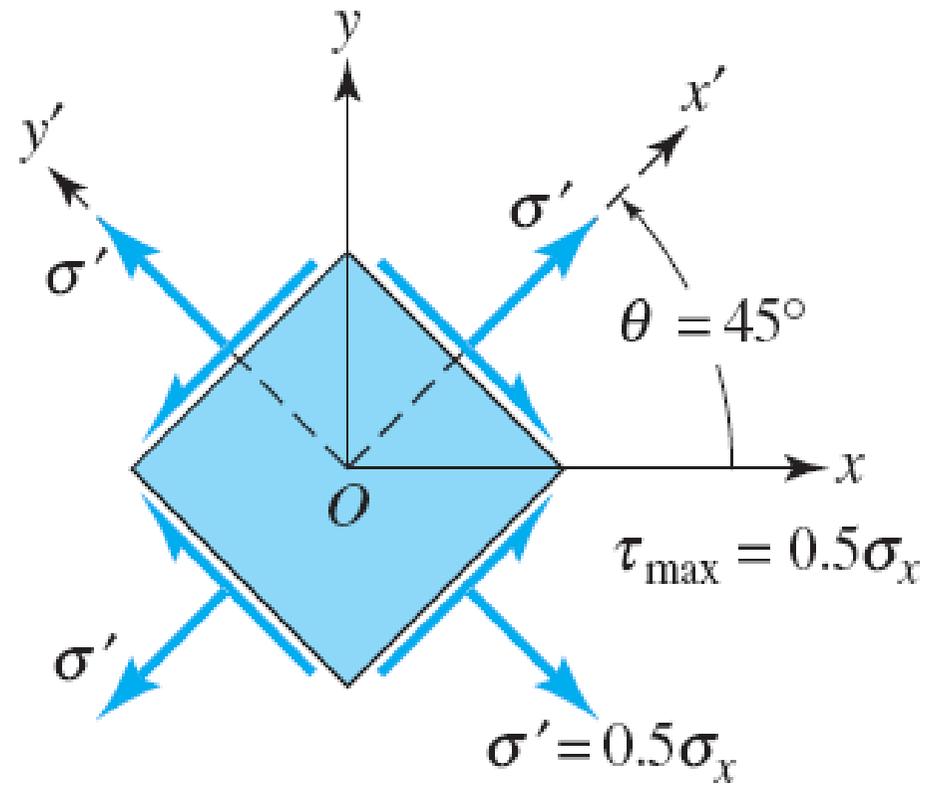


FIGURE 4.15 Planes of maximum shear stress for a bar shown in Fig. 4.13a.

TRANSFORMAÇÕES DAS TENSÕES E DAS DEFORMAÇÕES

Introdução

- Lembrando que a **tensão de cisalhamento máxima** para uma barra carregada axialmente atua num plano inclinado a 45° .
- A **tensão normal máxima** para um eixo em ***torção*** também acontece num plano a 45° .
- Por outro lado, seções inclinadas isoladas de uma viga podem estar sob ambas tensões normal e de cisalhamento.

Introdução

- Equações de **transformações das tensões** são obtidas somente com base nas **condições de equilíbrio**. Ou seja, elas não dependem das propriedades do material ou da geometria de deformação.
- As equações **transformações das deformações** são baseadas somente na **geometria de deformação**.
- Todas as fórmulas para tensão e deformação são limitadas para materiais isotópico, homogêneo, e na região elástica de comportamento linear

Estado plano de tensões

- Um estado plano de tensões existe em **2D** quando a tensão na terceira direção não é muito significativa
 - Exemplo: σ_x , σ_y and τ_{xy} pode ser diferente de zero, enquanto σ_z , τ_{xz} and τ_{yz} são zero
 - Para problemas de tensão plana, as deformações em todas as três direções (i.e., ϵ_x , ϵ_y and ϵ_z) são diferentes de zero
- Aplicações: vasos de pressão

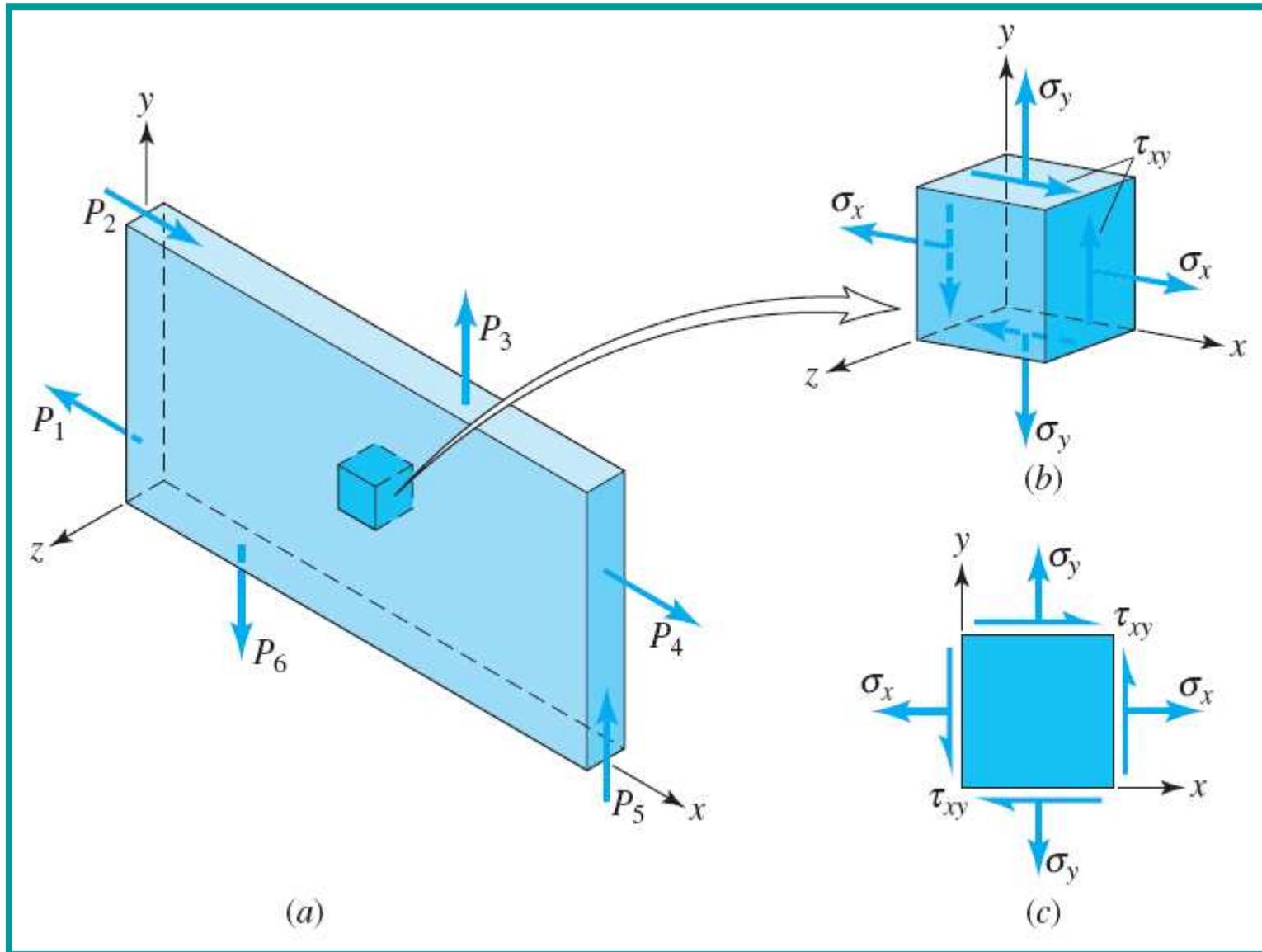


FIGURA (a) Placa fina com cargas no plano; (b) elemento em estado plano; (c) representação bi-dimensional de estado plano de tensão.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

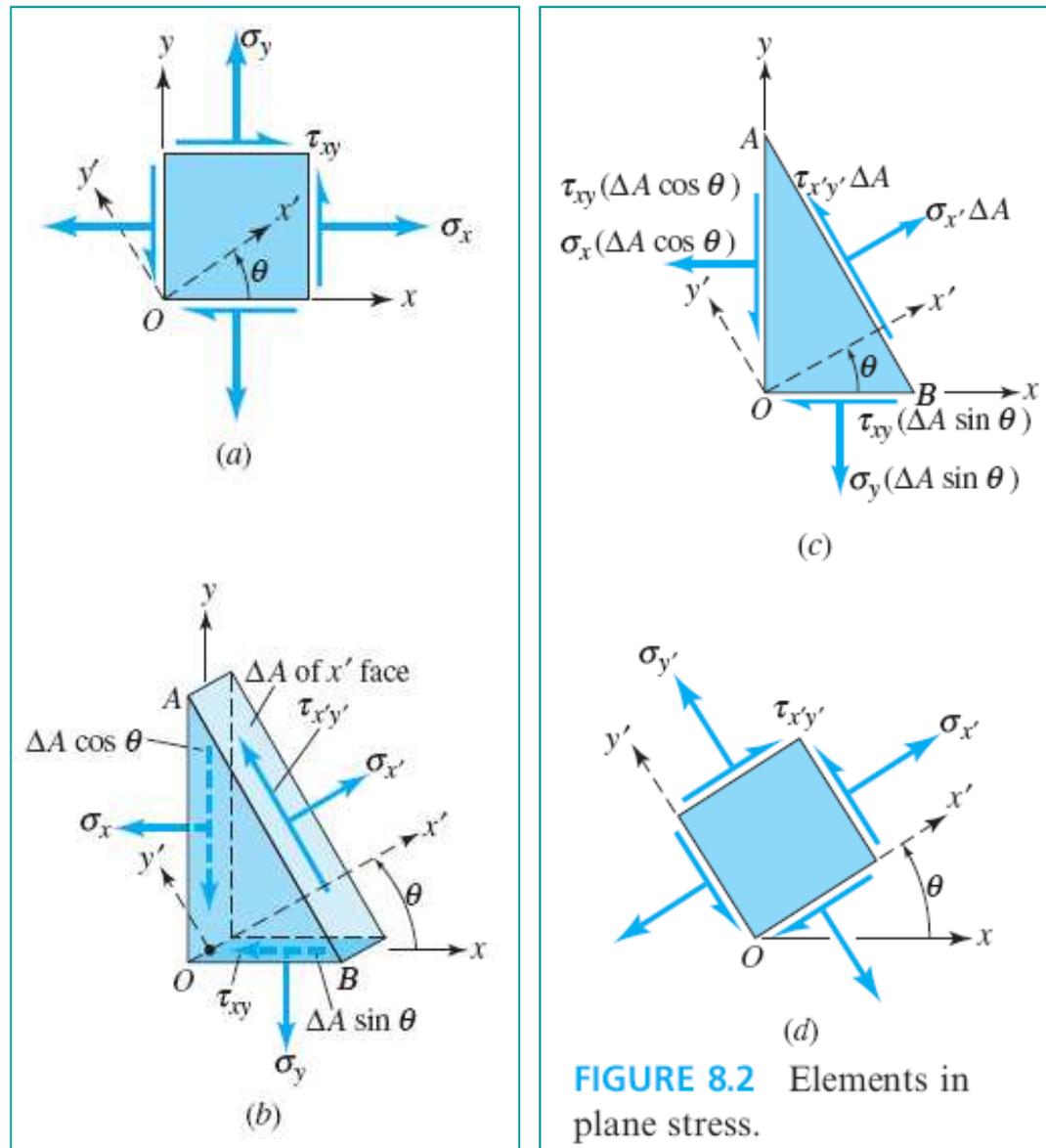
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Tensões nos
planos
inclinados



Método Analítico

Usando as equações de equilíbrio nas direções x e y, resulta em:

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

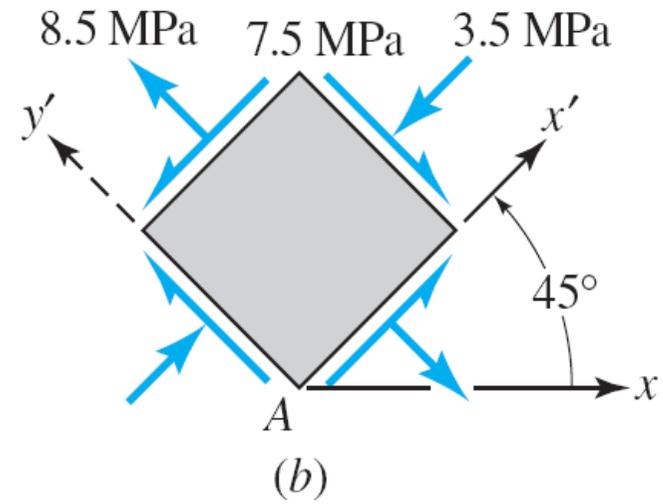
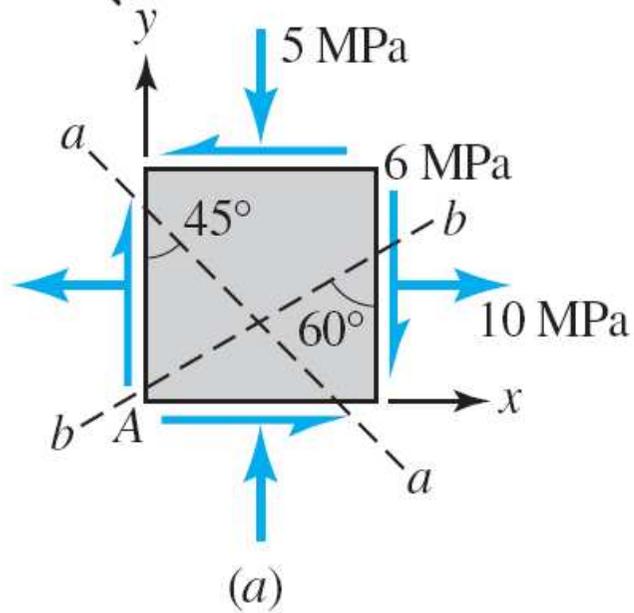
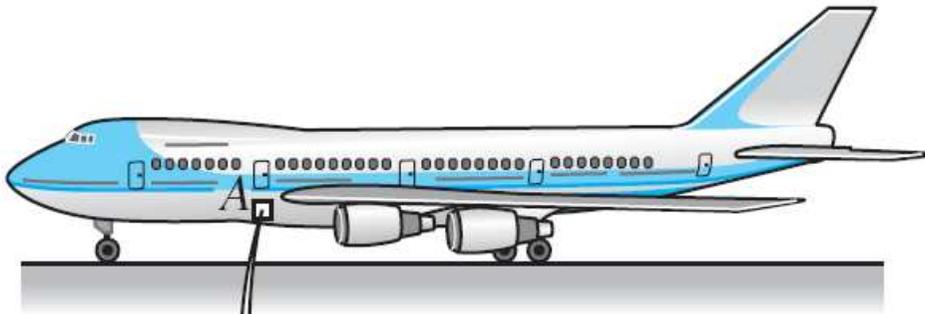
$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \operatorname{sen} 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

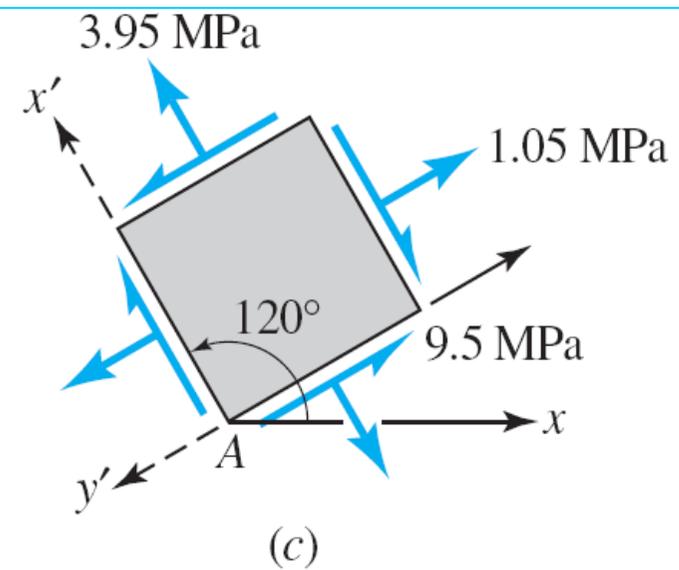
$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = \text{constant}$$

CASOS ESPECIAIS DE TENSÃO PLANA

- Estado de tensão uniaxial (ex: $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$)
- Estado de cisalhamento puro ($\sigma_x = \sigma_y = 0$)
- Estado de Tensão Biaxial ($\tau_{xy} = 0$)



Elemento tensão para $\theta = 45^\circ$ and $\theta = 120^\circ$



Tensões Principais

$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Direções Principais

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$$

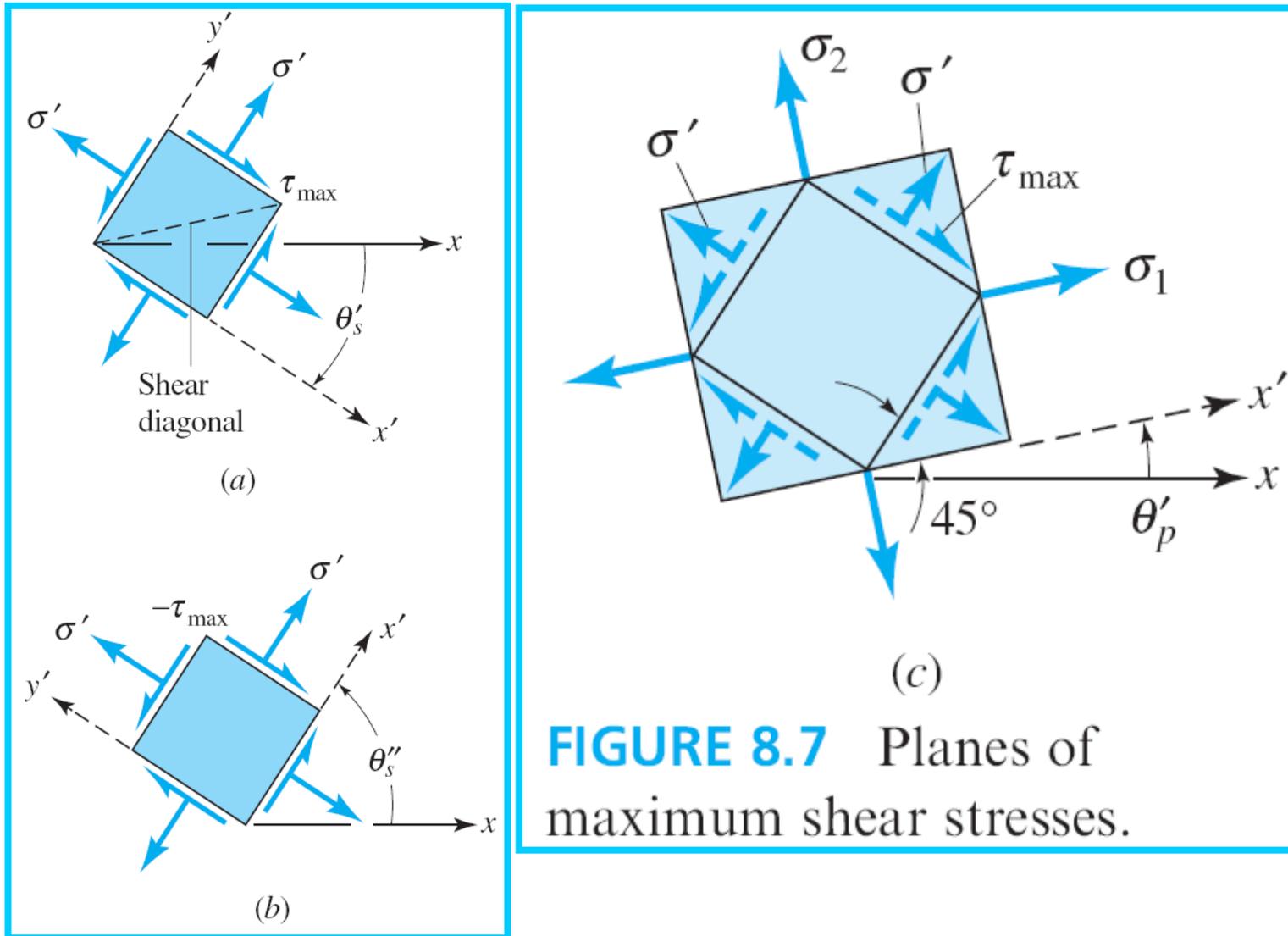
Tensão Média

$$\sigma_{\text{avg}} = \sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Raio

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Tensão de Cisalhamento Máxima

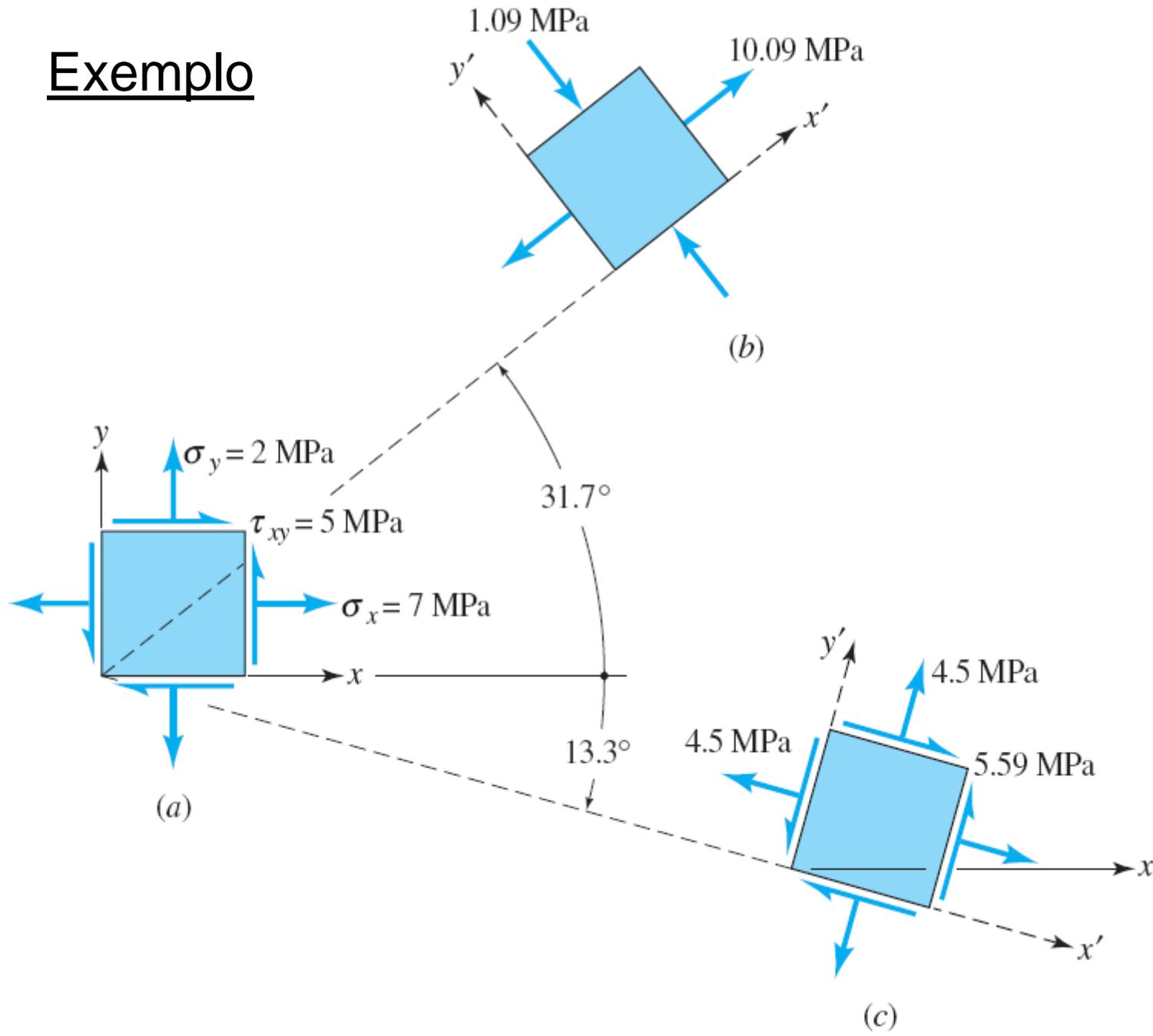


Equações para tensão de cisalhamento máxima

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

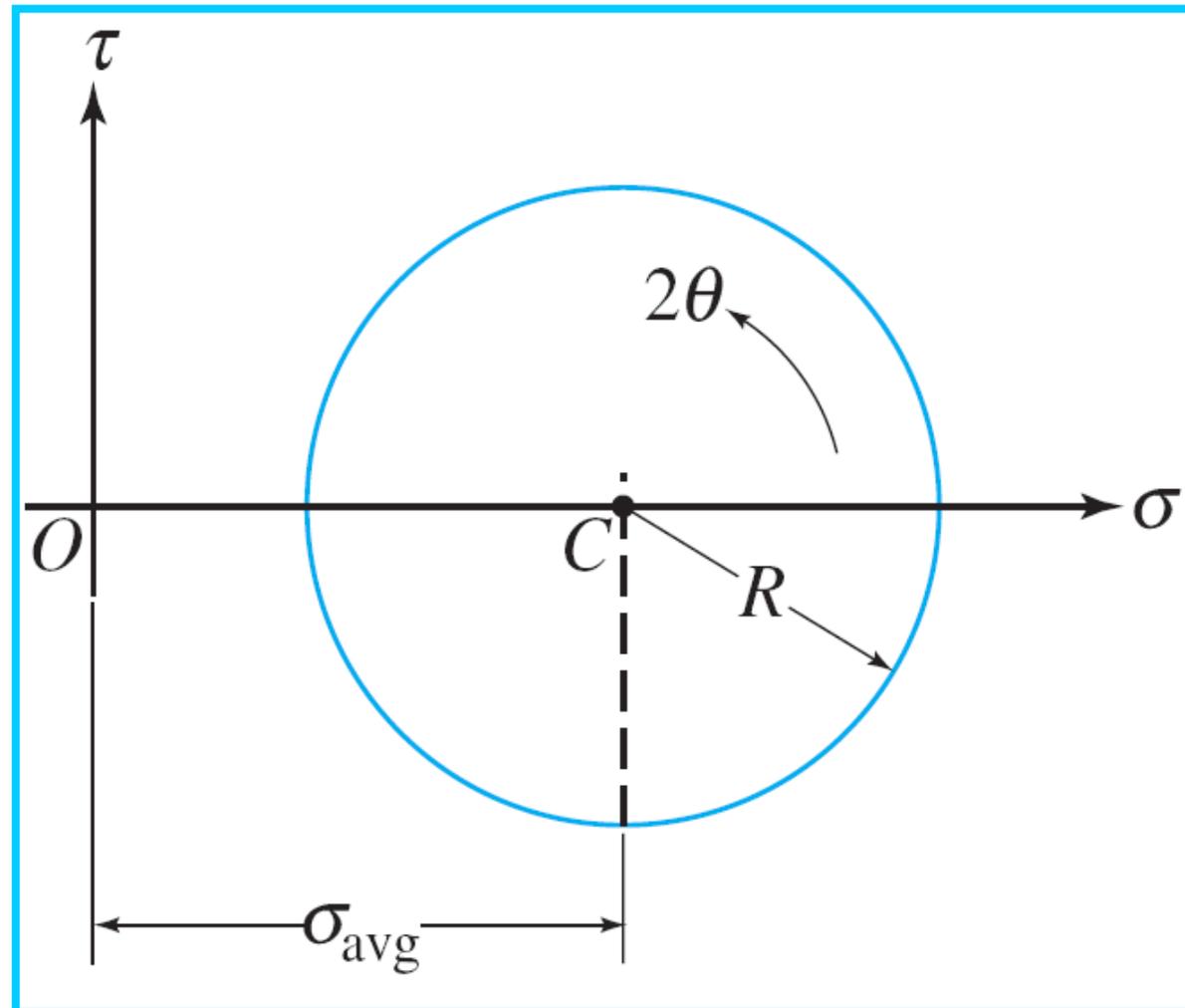
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Exemplo



Método Gráfico

Círculo de Mohr para Tensão Plana



Construção do círculo de Mohr

1. Set up a rectangular coordinate system, indicating $+\sigma$ and $+\tau$. Both stress scales must be identical.
2. Locate the center C of the circle on the horizontal axis a distance $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ from the origin O .
3. Locate point A ($\theta = 0$) by coordinates $\sigma_x, -\tau_{xy}$. These stresses may relate to any face of the stress element; however, it is usual to specify the stresses on the positive x face.
4. Draw a circle with the center at C and with radius CA .
5. Draw line AB through C .

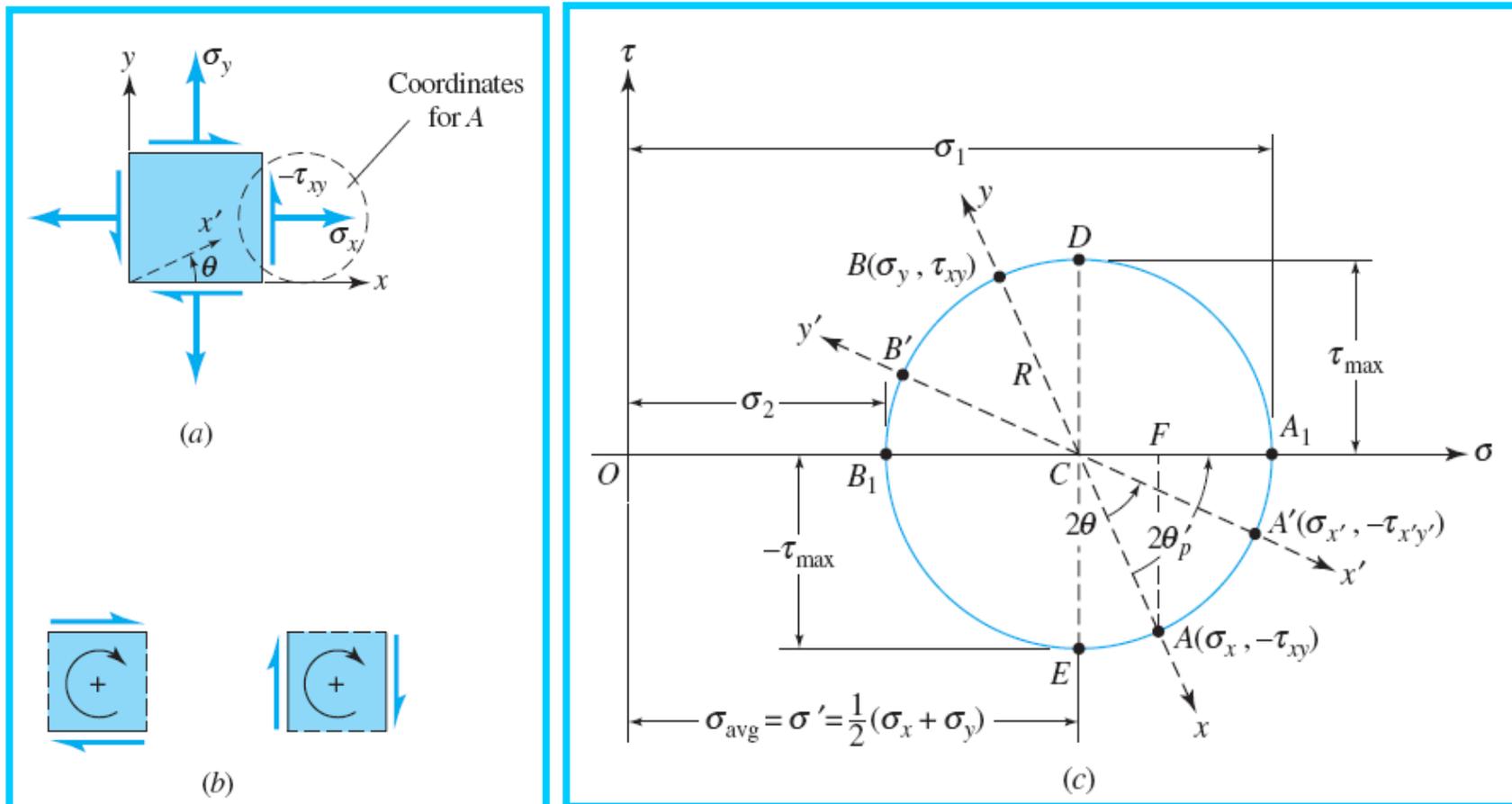


FIGURE 8.10 (a) Stress element; (b) sign convention for shear stress; and (c) Mohr's circle of stress.

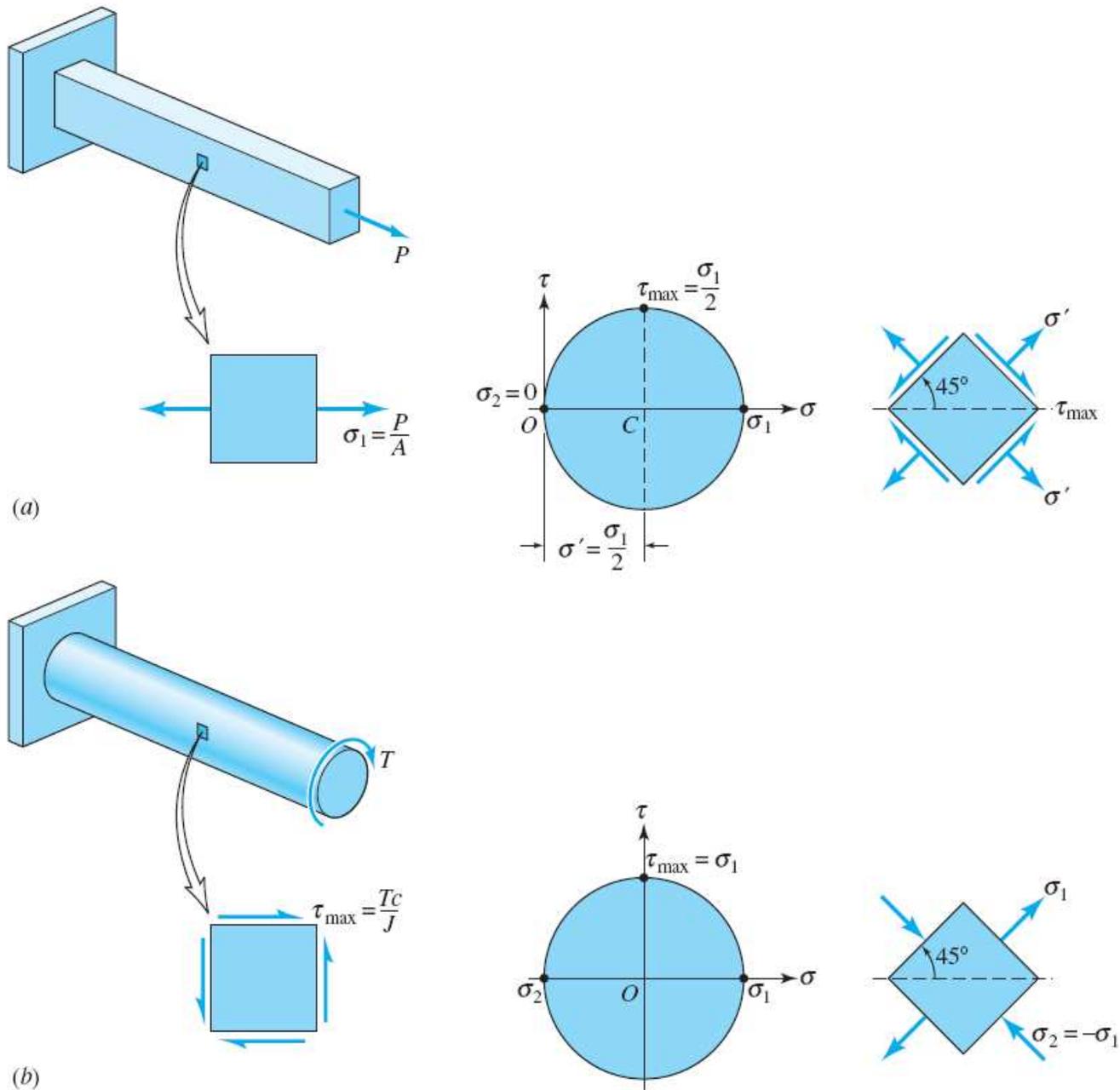
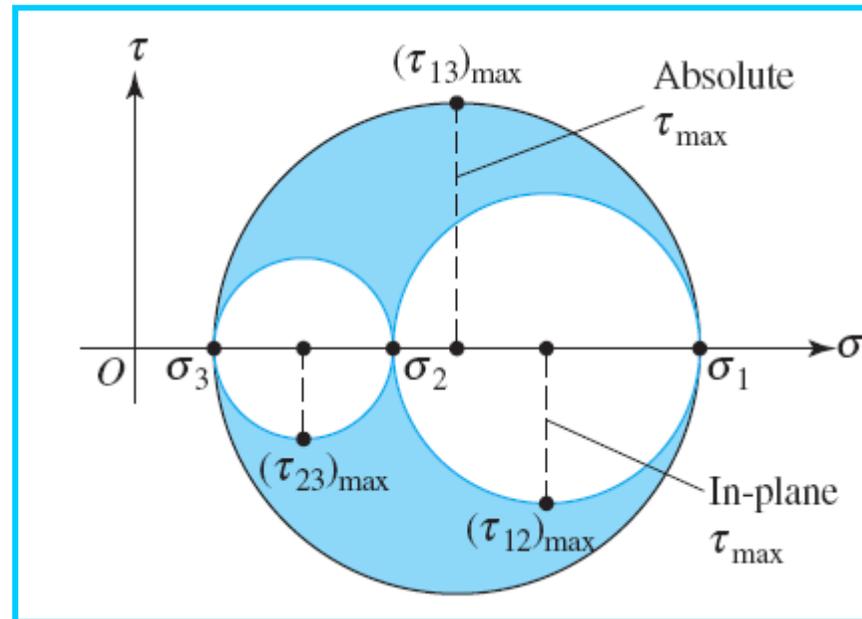


FIGURE 8.11 Mohr's circles for axial and torsional loadings: (a) element in uniaxial stress; (b) element in pure shear.

Círculo de Mohr – 3D



$$(\tau_{\max})_a = (\tau_{13})_a = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Vasos de Pressão de Parede Fina

Um vaso de parede fina é aquele na qual a distribuição de tensão é praticamente constante através da espessura, enquanto que um vaso de parede grossa, a tensão normal varia ao longo da espessura.

Se a razão entre a espessura da parede t e o raio interno r é igual ou menor que aproximadamente $1/10$ (ou $r/t \geq 10$), o vaso é classificado como de parede fina. Na realidade, em vasos de parede fina, frequentemente não existe nenhuma distinção entre raio interno e raio externo porque eles são praticamente iguais.

Exemplos reais de vasos de pressão cilíndricos e esféricos (Cortesia CB&I.)

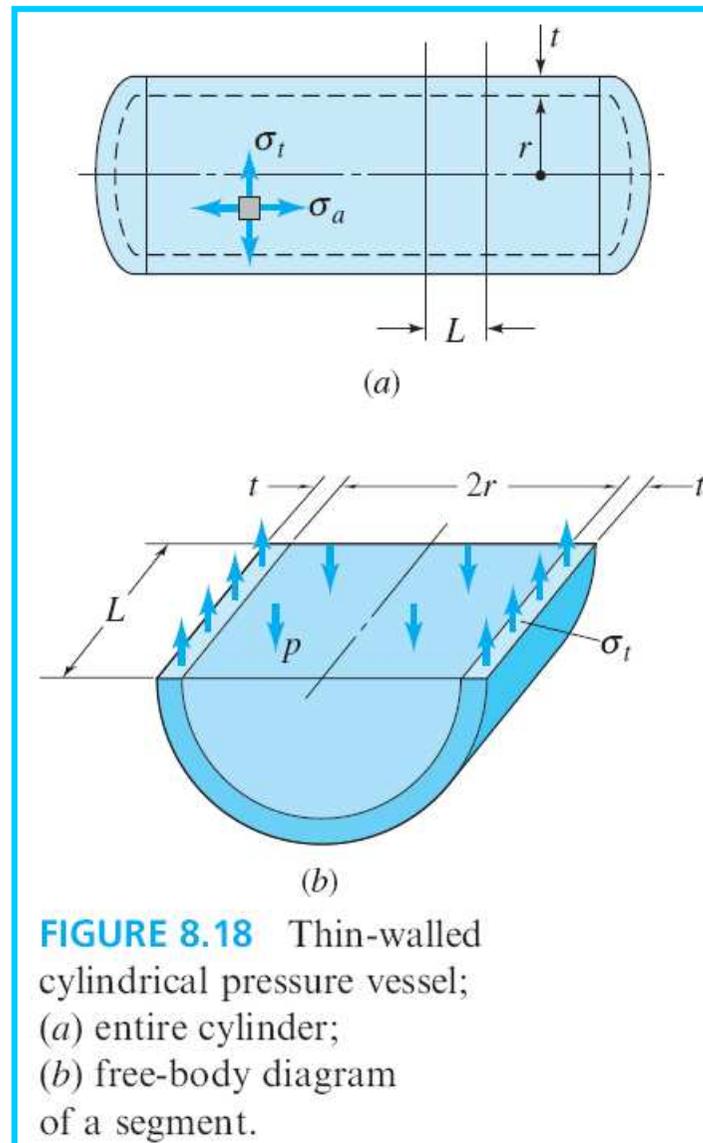


(a)



(b)

Modelo de um vaso de pressão cilíndrico e equações



Tensão tangencial:

$$\sigma_t = \frac{pr}{t}$$

Modelo de um vaso de pressão cilíndrico e equações

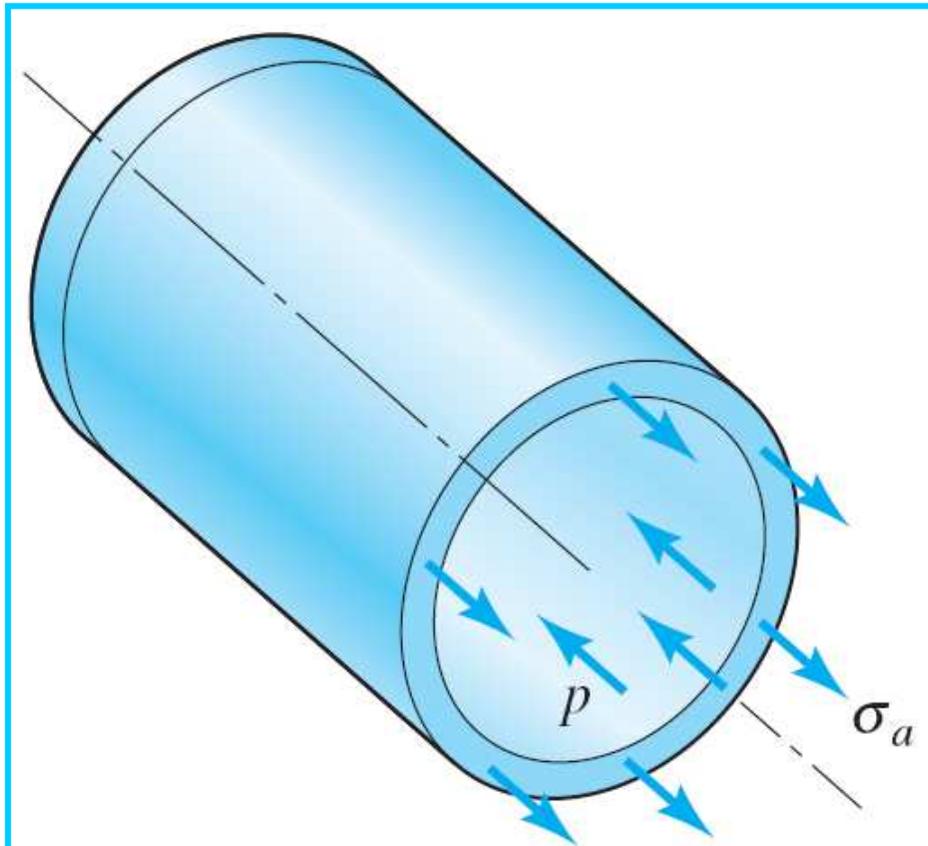


FIGURE 8.19 Free-body diagram of the portion of the vessel shown in Fig. 8.18a.

Tensão tangencial:

$$\sigma_t = \frac{pr}{t}$$

Tensão longitudinal :

$$\sigma_a = \frac{pr}{2t}$$

Deformação devido à pressão interna

Deformação circunferencial devido à pressão interna

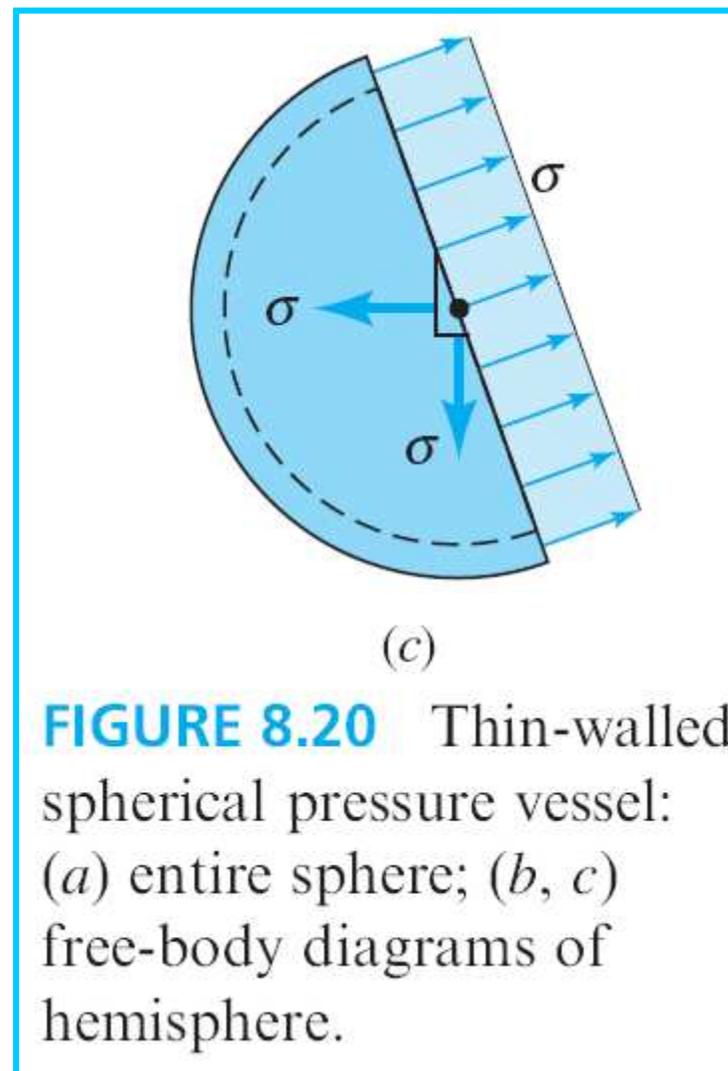
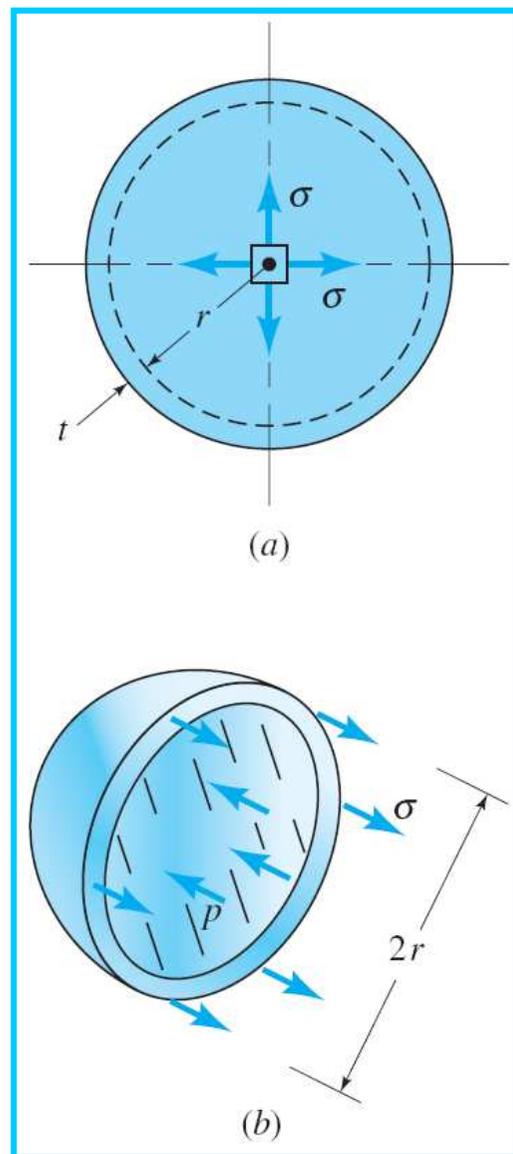
$$\varepsilon_t = \frac{1}{2\pi r} [2\pi(r + \delta_c) - 2\pi r] = \frac{\delta_c}{r}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_a)$$

Alongamento do raio do cilindro:

$$\delta_c = \frac{pr^2}{2Et} (2 - \nu)$$

Vaso de pressão esférico



Vaso de pressão esférico

Tensão tangencial devido à pressão interna:

$$\sigma = \frac{pr}{2t}$$

Alongamento do raio da esfera:

$$\delta_s = \frac{pr^2}{2Et} (1 - \nu)$$

MAXIMUM SHEAR STRESS IN VESSELS

Cylindrical vessel:

$$(\tau_{\max})_a = \frac{1}{2} (\sigma_t - 0) = \frac{pr}{2t}$$

Spherical vessel:

$$(\tau_{\max})_a = \frac{1}{2} (\sigma - 0) = \frac{pr}{4t}$$

Triaxial stress state in pressure vessel for finding τ_{\max}

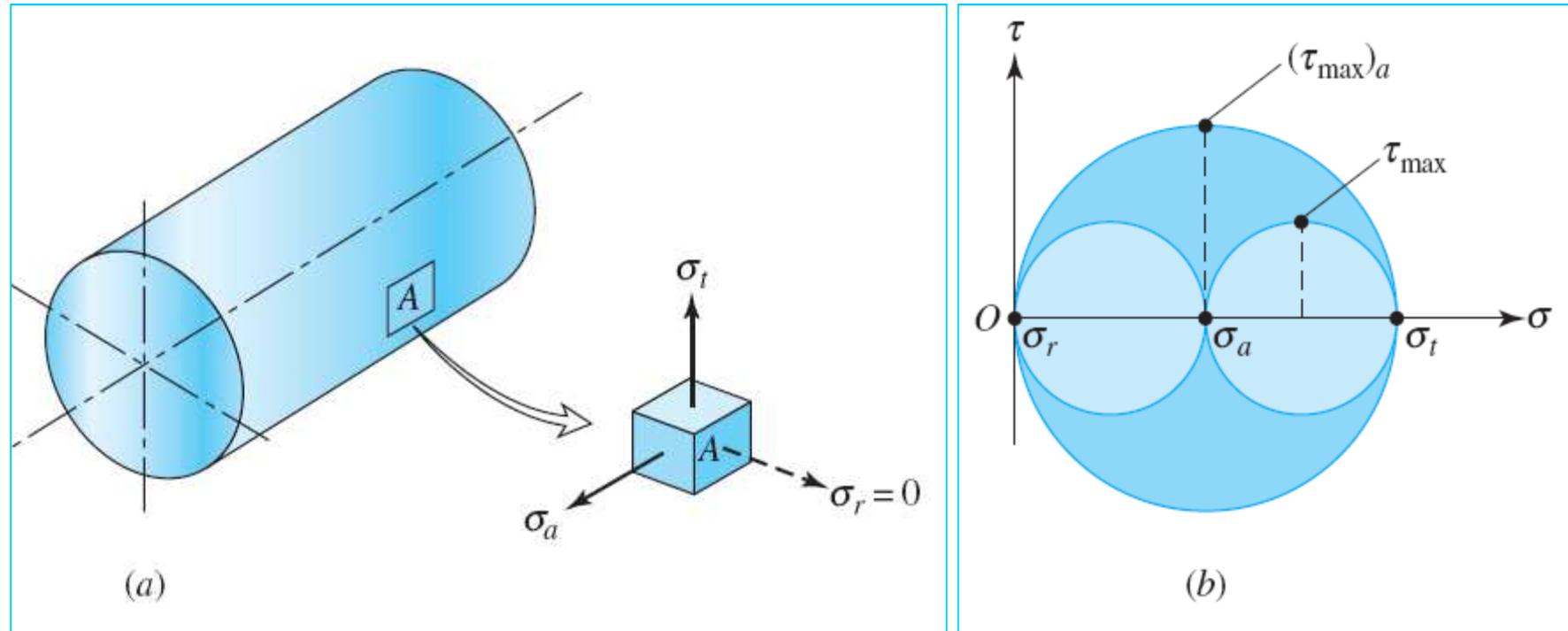
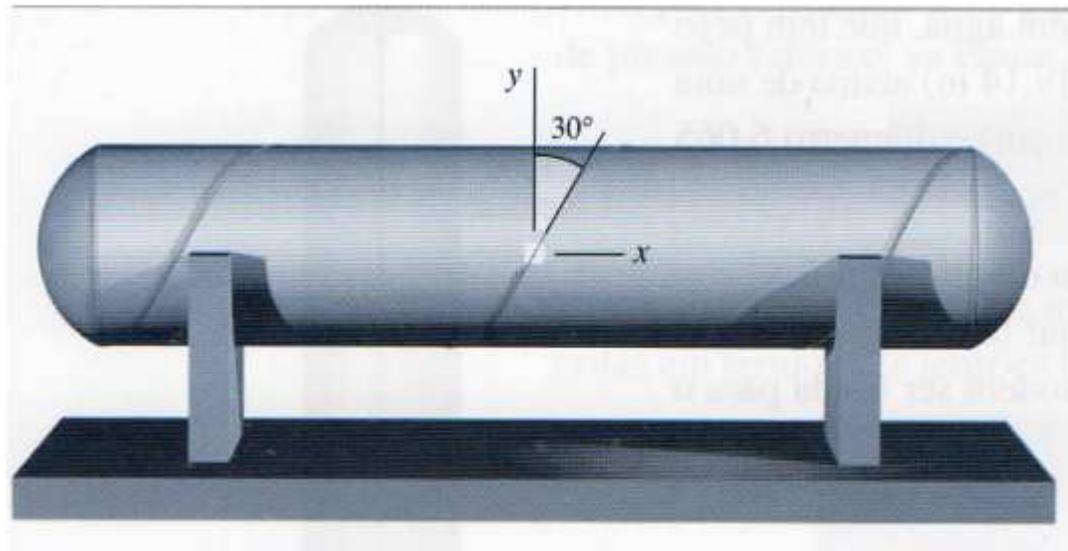


FIGURE 8.21 (a) Internally pressurized cylinder illustrating biaxial stresses. Note that obtaining the correct value of τ_{\max} requires taking σ_r into account; an erroneous (in-plane) value of τ_{\max} is obtained if σ_r is neglected. (b) Mohr's circle of stress.

Exemplo 1

Um vaso de pressão cilíndrico com diâmetro interno 870 mm é construído enrolando no formato de espiral uma placa de aço com 15 mm de espessura e fixando as bordas adjacentes por meio de uma solda de topo. As costuras da solda de topo formam um ângulo de 30° com um plano transversal através do cilindro. Determine a tensão normal a solda e a tensão cisalhante paralela a solda quando a pressão no vaso de pressão for de 2,2 Mpa.



Exemplo 2

Um tubo vertical com diâmetro interno de 108 in contém água, que tem peso específico de $62,4 \text{ lb/ft}^3$. A coluna de água fica a 30 ft acima de uma tubulação de saída, que tem diâmetro interno 6,065 in e espessura da parede de 0,28 in. (a) Determine a tensão longitudinal e a tensão tangencial no tubo de saída em **B**; (b) Se a tensão tangencial máxima no tubo em **A** deve estar limitada a 2500 psi, determine a espessura mínima de parede que poderá ser usada para o tubo vertical

